黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

ガンマ函数の無限積表示が大好き。

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \qquad (*)$$

なぜかゼータやガンマの独立変数は s なことが多いと思う。ヴェイユ先生もこう言っています↓

jstage.jst.go.jp/article/sugak...
【ζ-函数についていえば, 本質的な点は第一に ζ がギリシヤ語のアルファベットの一つであることで, 第二にその変数が普通 s と書かれることである: $\zeta(s)$】

2017年04月30日 10:58 · Web · 1 · 3 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on Apr 30
証明：

$$\begin{aligned} &n^s B(s, n+1) \\ &\quad = \frac{n^s\Gamma(s)\Gamma(n+1)}{\Gamma(s+n+1)} \\ &\quad\quad = \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &n^s B(s, n+1) \\ &\quad = n^s \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^n\,dx \\ &\quad\quad = \int_0^n t^{s-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \end{aligned}$$

2つ目の等号で $x = t/n$ とおいた. ゆえに, $n\to\infty$ のとき,

$$\begin{aligned} &\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \\ &\quad = \int_0^n t^{s-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \\ &\quad\quad \longrightarrow \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(s). \end{aligned}$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on Apr 30

要するに、ガンマ函数の無限積表示はベータ函数が $n \to \infty$ で

$$B(s, n+1) \sim n^{-s}\Gamma(s)$$

と振る舞うというだけの簡単な話です。$s = 1/2$ の場合はWallisの公式。